数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 97-109

Convergence Theorems with Generalized Projections in Banach Spaces and Applications

高阪 史明 (Fumiaki Kohsaka), 高橋 渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院 情報理工学研究科
(Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology)

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, $g, g_1, g_2, \ldots, g_m : H \to \mathbf{R}$ を連続な凸関数とする. また,

$$C = \{x \in H : g_i(x) \leq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

とする. このとき,

$$g(u) = \min_{x \in C} g(x)$$

を満たす点 $u \in C$ を求める問題を凸計画問題という. C が空でないとし,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases}$$

とすると, $f : H \to (-\infty, \infty]$ は proper で下半連続な凸関数になる. また, 点 u が凸計画問題の解であることは $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$ と同値である. このとき, $x \in H$ に対して,

$$\partial f(x) = \{z \in H : f(x) + \langle y - x, z \rangle \leq f(y) \ \ (\forall y \in H)\}$$

を対応させる H から H への集合値写像 ∂f を f の劣微分という. 容易にわかるように, ∂f は単調作用素である. すなわち, 任意の $(x, u), (y, v) \in \partial f$ について, $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$ が成り立つ. さらに, Rockafellar [19] は ∂f が極大単調作用素であることを証明した. すなわち, ∂f のグラフを真に含むような単調作用素は存在しない. このとき, $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$ であることは, $0 \in \partial f(u)$ であることと同値になる. よって, 凸計画問題は, 極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対して,

$$0 \in Au$$

を満たす点 $u \in H$ を求める問題に一般化される.

$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とし, $r > 0$ とする. このとき, 任意の $x \in H$ に対して,

$$J_r(x) = \{z \in H : x \in z + rAz\}$$

とすると，J_r は H から $D(A)$ への一価写像になることが知られている (cf: 高橋 [27, 28])．これを A の resolvent という．さらに，J_r は非拡大写像であることが知られている．すなわち，任意の $x, y \in H$ について

$$\|J_r x - J_r y\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つ．また，$0 \in Au$ であることは $u = J_r u$ と同値である．よって，Hilbert 空間では，極大単調作用素の解を求める問題を非拡大写像の不動点問題としてとらえることができる．

極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対し，$0 \in Au$ の解を求める近似法の一つとしてよく知られているのが，Martinet [13] により考案された近接点法 (Proximal Point Algorithm) である．この方法では初期点 $x = x_1 \in H$ をとり，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により構成する．ここで $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ である．1976 年に，Rockafellar [22] は，次の弱収束定理を証明した:

定理 1.1 (Rockafellar [22])． H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし，

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\underline{\lim}_{n \to \infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

その後，Brézis-Lions [2]，Lions [12]，Passty [15]，Güler [5] 等によって，Hilbert 空間における近接点法に関して多くの研究がなされてきた．特に，上村 - 高橋 [7] は次の弱収束定理と強収束定理を証明した:

定理 1.2 (上村 - 高橋 [7])． H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\overline{\lim}_{n \to \infty} \alpha_n < 1$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

定理 1.3 (上村 - 高橋 [7])． H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n \to \infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで $P_{A^{-1}0}$ は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

一方，Solodov-Svaiter [24] は，数理計画で用いられる hybrid 法を用いて，次の強収束定理を証明した:

定理 1.4 (Solodov-Svaiter [24]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．また，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ とし，

$$\begin{cases} x_1 = x \in H; \\ X_n = \{z \in H : \langle z - J_{r_n}x_n, x_n - J_{r_n}x_n \rangle \leq 0\}; \\ Y_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x - x_n \rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{X_n \cap Y_n}(x) \ \ (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，任意の空でない閉凸集合 $C \subset H$ について，P_C は H から C の上への距離射影を表すとする．

次に，これらの定理を Hilbert 空間から Banach 空間に拡張することについて考える．Hilbert 空間においては，$A \subset H \times H$ が単調作用素であることと増大作用素であることは同じことであるが，Banach 空間においては異なった概念である．実際，E を Banach 空間とするとき，$A \subset E \times E$ が増大作用素であるとは，任意の $(x, u), (y, v) \in E$ に対し，ある $j \in J(x - y)$ が存在して，$\langle u - v, j \rangle \geq 0$ が成り立つことであり，$T \subset E \times E^*$ が単調作用素であるとは，任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対し，$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つことである．ここで，J は E から E^* への双対写像である．上村 - 高橋 [8] は，増大作用素に対して，定理 1.2 と定理 1.3 をそれぞれ，次のように Banach 空間に拡張した:

定理 1.5 (上村 - 高橋 [8]). E を一様凸な Banach 空間とし，E のノルムが Fréchet 微分可能であるか E が Opial 条件を満たすとする．また，$A \subset E \times E$ を増大作用素とし，$C \subset E$ を閉凸集合で $D(A) \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ を満たすものとする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$J_r = (I + rA)^{-1}$ $(r > 0)$ とし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

定理 1.6 (上村 - 高橋 [8]). E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ回帰的な Banach 空間とし，E に含まれる任意の有界閉凸集合が非拡大写像に対して不動点性をもつとする．また，$A \subset E \times E$ を増大作用素とし，$C \subset E$ を閉凸集合で $D(A) \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ を満たすものとする．$x_1 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$J_r = (I + rA)^{-1}$ $(r > 0)$ とし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に強収束する．ここで $Px = v$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

最近になって，上村 - 高橋 [10] と大沢 - 高橋 [14] はそれぞれ，極大単調作用素に対して，定理 1.4 を次のように Banach 空間に拡張した．

定理 1.7 (上村 - 高橋 [10]). E を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．また，$T^{-1}0 \neq \emptyset$ とし，

$$\begin{cases} x_1 = x \in E; \\ X_n = \{z \in E : \langle z - J_{r_n}x_n, Jx_n - J(J_{r_n}x_n)\rangle \leq 0\}; \\ Y_n = \{z \in E : \langle z - x_n, Jx - Jx_n\rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{X_n \cap Y_n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\varliminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{T^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，任意の空でない閉凸集合 $C \subset E$ について，P_C は E から C の上への generalized projection を表すとする．

定理 1.8 (大沢 - 高橋 [14]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．また，$T^{-1}0 \neq \emptyset$ とし，

$$\begin{cases} x_1 = x \in E; \\ X_n = \{z \in E : \langle z - J_{r_n}x_n, J(x_n - J_{r_n}x_n)\rangle \leq 0\}; \\ Y_n = \{z \in E : \langle z - x_n, J(x - x_n)\rangle \leq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{X_n \cap Y_n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$J_r = (I + rJ^{-1}T)^{-1}$ $(r > 0)$ とし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\varliminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{T^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，任意の空でない閉凸集合 $C \subset E$ について，P_C は E から C の上への距離射影を表すとする．

E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．本研究においては，$0 \in Tu$ の解の近似列として，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n)J(J_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ を考える．ただし，J は E から E^* への双対写像で，$J_r = (J+rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とする．また，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ とする．次に，このようにして定義された点列 $\{x_n\}$ がある条件の下で，$T^{-1}0$ の元に強収束することを証明する (定理 3.1)．E が Hilbert 空間ならば，J は恒等写像 I となるので，定理 3.1 は定理 1.3 の Banach 空間へ拡張である．さらに，この定理を Banach 空間における凸最小化問題，変分不等式問題，minimax 問題に応用する．

2 準備

$\mathbf{N}$ で正の整数全体の集合を表し，$\mathbf{R}$ で実数全体の集合を表す．E を実 Banach 空間とする．E の元からなる点列 $\{x_n\}$ と E の点 x について，$\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，$\{x_n\}$ が x に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．また，E の双対写像 J は，任意の $x \in E$ に対して，

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる E から E^* への集合値写像である． $J(0)=0$ であることは明らかである．また，Hahn-Banach の定理により，任意の $x\in E$ に対し， $Jx\neq\emptyset$ である．特に， E が Hilbert 空間ならば， J は恒等写像 I となる．集合値写像 $T\subset E\times E^*$ が単調であるとは，任意の (x,x^*), $(y,y^*)\in T$ に対して， $\langle x-y,x^*-y^*\rangle\geq 0$ が成り立つことをいう．また，単調作用素 T が極大であるとは， $S\subset E\times E^*$ が単調作用素で， $T\subset S$ ならば $T=S$ となることをいう．このとき， $T^{-1}0=\{x\in E:0\in Tx\}$ が閉凸集合になることが証明できる．また， $D(T)$ で T の定義域 $\{x\in E:Tx\neq\emptyset\}$ を表すとする．

関数 $f:E\to(-\infty,\infty]$ が proper であるとは， $f(a)\in\mathbf{R}$ を満たす点 $a\in E$ が存在することをいう．また， f が下半連続であるとは，任意の $r\in\mathbf{R}$ に対して， $\{x\in E:f(x)\leq r\}$ が E の閉集合になることをいう．さらに， f が凸関数であるとは，すべての $x,y\in E$ と $\alpha\in(0,1)$ に対して，

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

が成り立つことをいう． $f:E\to(-\infty,\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．このとき， $x\in E$ に対して，

$$\partial f(x)=\{x^*\in E^*:f(x)+\langle y-x,x^*\rangle\leq f(y)\ \ (\forall y\in E)\}$$

を対応させる E から E^* への集合値写像 ∂f を f の劣微分という． Rockafellar [19] は， ∂f が極大単調作用素になることを証明した (cf: 高橋 [27])．また，

$$(\partial f)^{-1}(0)=\{x\in E:f(x)=\min_{y\in E}f(y)\}$$

となる．例えば，任意の $x\in E$ に対して， $g(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$ とするとき， $\partial g=J$ となる (cf: 高橋 [27])．次の定理もよく知られている: E を Banach 空間とし， $f:E\to(-\infty,\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．また， $g:E\to\mathbf{R}$ を連続な凸関数とする．このとき，任意の $x\in E$ に対し，

$$\partial(f+g)(x)=\partial f(x)+\partial g(x)$$

が成り立つ．

Banach 空間 E が狭義凸であるとは， $\|x\|=\|y\|=1$ で $x\neq y$ ならば $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$ が成り立つことをいう．また， E が一様凸であるとは， E の元からなる点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して，

$$\|x_n\|=\|y_n\|=1,\ \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$$

ならば $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ が成り立つことをいう． E が一様凸ならば狭義凸である．また，一様凸な Banach 空間は回帰的である．一方， E が滑らかであるとは，任意の $x,y\in S(E)$ $=\{z\in E:\|z\|=1\}$ に対して，

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}\quad\cdots(*)$$

が存在することをいう．また， E が一様に滑らかであるとは， $(*)$ が $x,y\in S(E)$ について一様収束することをいう． E が滑らかで，狭義凸な回帰的 Banach 空間ならば， E から E^* への双対写像 J は一価で全単射となる．このとき， J の逆写像 J^{-1} は E^* から E への双対写像となる．次もよく知られている (cf: 高橋 [27, 28]):

(1) E が一様に滑らかならば，J は E の任意の有界集合上でノルムの意味で一様連続である;
(2) E が一様に滑らかであることと，E^* が一様凸であることは同値である．

例えば，$L^p(X)$ $(1 < p < \infty)$ は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間であり，その双対写像を J とすると，$J(0) = 0$ であり，$x \in L^p(X) \setminus \{0\}$ ならば，$t \in X$ に対して，

$$(Jx)(t) = \|x\|_{L^p}^{2-p} |x(t)|^{p-1} \mathrm{sign}\, x(t)$$

となる (cf: Cioranescu [4])．ここで，$\mathrm{sign}\, \lambda$ は $\lambda \in \mathbf{R}$ の符号を表すとする．また，Xu [29] は次の補助定理を証明した:

補助定理 2.1 (Xu [29]). E を一様凸な Banach 空間とし，$r > 0$ とする．このとき，狭義単調増加で連続な凸関数 $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ で $g(0) = 0$ を満たすものが存在して，任意の $x, y \in \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して，

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)g(\|x - y\|)$$

が成り立つ．

次に，Hilbert 空間における距離射影の一般化である generalized projection (Alber [1]，上村 - 高橋 [10]) について説明する．E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし，$C \subset E$ を空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $u, v \in E$ に対し，

$$\phi(u, v) = \|u\|^2 - 2\langle u, Jv \rangle + \|v\|^2$$

とおく．ただし，J は E から E^* への双対写像である．このとき，明らかに $\phi(u, v) \geq (\|u\| - \|v\|)^2$ が成り立つ．$x \in E$ を任意にとり，$u \in C$ に対して

$$g(u) = \|u\|^2 - 2\langle u, Jx \rangle + \|x\|^2$$

とする．このとき，$g : C \to [0, \infty)$ は連続な凸関数であり，$\|u_n\| \to \infty$ ならば $g(u_n) \to \infty$ となる．E は回帰的であるから，$g(x_0) = \min_{u \in C} g(u)$ となる点 $x_0 \in C$ が存在する (cf: 高橋 [27])．すなわち，

$$\phi(x_0, x) = \min_{u \in C} \phi(u, x)$$

である．E は狭義凸であるので，そのような $x_0 \in C$ は一意である．この E から C の上への写像のことを generalized projection といい，P_C で表す．E が Hilbert 空間ならば，すべての $u, v \in E$ に対し，$\phi(u, v) = \|u - v\|^2$ となるので，P_C は E から C の上への距離射影と一致する．また，$x \in E$ とするとき，$x_0 = P_C(x)$ であることと，任意の $y \in C$ に対して，

$$\langle y - x_0, Jx - Jx_0 \rangle \leq 0$$

が成り立つことは同値であることが証明されている (Alber [1], 上村 - 高橋 [10])．

E を滑らかで狭義凸な回帰的Banach 空間とし，$T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．また，$r > 0$ とする．このとき，任意の $x \in E$ に対して，

$$J_r(x) = \{z \in E : Jx \in Jz + rTz\}$$

とすると，J_r は E から $D(T)$ への一価写像になることが知られている (cf: 高橋 [27]). これを T の resolvent という．言い換えれば，$J_r = (J + rT)^{-1}J$ である．E が Hilbert 空間ならば，$J = I$ であるので，Hilbert 空間における resolvent の定義と一致する．また，$0 \in Tu$ であることは $u = J_r u$ と同値である．さらに，T の吉田近似は $A_r = \frac{1}{r}(J - JJ_r)$ で定義される．このとき，任意の $x \in E$ に対して，$(J_r x, A_r x) \in T$ となる．

3 Banach 空間における極大単調作用素に対する強収束定理

この節では，本研究の主結果である Banach 空間での極大単調作用素に対する強収束定理を得る．この結果は実際，Hilbert 空間での上村 - 高橋の定理 (定理 1.3) の一般化になっている．

定理 3.1 ([11]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n)J(J_{r_n} x_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$T^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $P_{T^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，$P_{T^{-1}0}$ は E から $T^{-1}0$ の上への generalized projection である．

証明の概略 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$y_n = J_{r_n} x_n$ とし，$P = P_{T^{-1}0}$ とおく．まず，T が単調作用素であることから，$n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\phi(Px, x_{n+1}) \le \alpha_n \phi(Px, x) + (1 - \alpha_n)\phi(Px, x_n)$$

となることが示せる．よって，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$\phi(Px, x_n) \le \phi(Px, x)$ が成り立つ．$(\|Px\| - \|x_n\|)^2 \le \phi(Px, x_n)$ であるので，$\{x_n\}$ は有界である．

次に，$z_n = x_{n+1}$ とおく．$\{y_n\}$ は有界であり，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \|Jz_n - Jy_n\| = 0$$

である．E は一様凸なので，J^{-1} は E^* に含まれる任意の有界集合上でノルムの意味で一様連続である．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = 0 \tag{1}$$

となる．一方，$\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n_i}\}$ で，

$$\lim_{i\to\infty} \langle z_{n_i} - Px, Jx - JPx \rangle = \overline{\lim}_{n\to\infty} \langle z_n - Px, Jx - JPx \rangle$$

であり，$z_{n_i} \rightharpoonup v \in E$ となるものが存在する．このとき，(1) と $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ 及び T の極大性から，$v \in T^{-1}0$ が示せる．よって，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x_n - Px, Jx - JPx \rangle \le 0 \tag{2}$$

となる．最後に，不等式 (2) と $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ 及び E の一様凸性を用いて，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Px\| = 0$ を証明することができる．■

4 応用

定理3.1からいくつかの強収束定理を証明する．まず，制約なしの凸最小化問題への応用を考える．

定理 4.1. E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．また，f は最小値をもつとする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}_{y \in E}\{f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle y, Jx_n\rangle\}; \\ x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1-\alpha_n)J(y_n)) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{(\partial f)^{-1}(0)}(x)$ に強収束する．

証明 $r > 0$ とし，$J_r = (J + r\partial f)^{-1}J$ とする．このとき，$z \in E$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial f(J_r z) + \frac{1}{r}J(J_r z) - \frac{1}{r}J(z) \\ &= \partial\Big(f + \frac{1}{2r}\|\cdot\|^2 - \frac{1}{r}J(z)\Big)(J_r z) \end{aligned}$$

となる．これより，

$$J_r z = \operatorname{argmin}_{y \in E}\{f(y) + \tfrac{1}{2r}\|y\|^2 - \tfrac{1}{r}\langle y, Jz\rangle\}$$

となる．よって，$y_n = J_{r_n}x_n$ が任意の $n \in \mathbf{N}$ について成り立つ．ここで，定理3.1を用いると，点列 $\{x_n\}$ は $P_{(\partial f)^{-1}(0)}(x)$ に強収束する．■

次に，変分不等式問題への応用を考える．C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし，$A : C \to E^*$ を一価の単調作用素とする．さらに，A は hemicontinuous であるとする．すなわち，任意の $x, y \in C$ に対し，A が集合

$$\{tx + (1-t)y : 0 \le t \le 1\}$$

上で連続であることをいう．ただし，E^* の位相は weak* 位相である．このとき，$u \in C$ が A に対する変分不等式の解であるとは，任意の $y \in C$ に対して，

$$\langle y - u, Au\rangle \ge 0$$

が成り立つことをいう．A に対する変分不等式の解全体の集合を $VI(C, A)$ で表す．また，$x \in C$ に対して

$$N_C(x) = \{x^* \in E^* : \langle y - x, x^*\rangle \le 0 \ \ (\forall y \in C)\}$$

とする．Rockafellar [20] は，

$$Tx = \begin{cases} A(x) + N_C(x) \quad (x \in C); \\ \emptyset \quad (x \notin C) \end{cases} \tag{3}$$

で定義される $T \subset E \times E^*$ が極大単調作用素であることを証明した．また，$VI(C, A) = T^{-1}0$ が成り立つ．

定理 4.2. C を滑らかで一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし，$A: C \to E^*$ を一価で hemicontinuous な単調作用素とする．また，$VI(C,A) \neq \emptyset$ とする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$\begin{cases} y_n = VI(C, A + \frac{1}{r_n}(J - Jx_n)); \\ x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1-\alpha_n)J(y_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{VI(C,A)}(x)$ に強収束する．

証明 $T \subset E \times E^*$ を (3) で定義される極大単調作用素とする．$r > 0$ とし，$J_r = (J + rT)^{-1}J$ とする．このとき，$z \in E$ とすると，

$$Jz - J(J_r z) \in rTJ_r z$$

であるので，

$$\tfrac{1}{r}(Jz - J(J_r z)) - AJ_r z \in N_C(J_r z)$$

となる．よって，任意の $y \in C$ に対して，

$$\langle y - J_r z, \tfrac{1}{r}(Jz - J(J_r z)) - AJ_r z\rangle \leq 0$$

が成り立つ．これより，

$$J_r z = VI(C, A + \tfrac{1}{r}(J - Jz))$$

となる．よって，$y_n = J_{r_n}x_n$ が任意の $n \in \mathbf{N}$ について成り立つ．ここで，定理 3.1 を用いると，点列 $\{x_n\}$ は $P_{VI(C,A)}(x)$ に強収束する．■

最後に，minimax 問題への応用を考える．$(E, \|\cdot\|_E)$ と $(F, \|\cdot\|_F)$ を回帰的な Banach 空間とし，$X \subset E$ と $Y \subset F$ を空でない閉凸集合とする．また，$L: X \times Y \to \mathbf{R}$ を，任意の $x \in X$ に対して，$y \in Y$ の関数 $L(x,y)$ が下半連続な凸関数であり，任意の $y \in Y$ に対して，$x \in X$ の関数 $L(x,y)$ は上半連続な凹関数であるとする．このとき，$(x_0, y_0) \in X \times Y$ が L の saddle point であるとは，任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対し，

$$L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$$

が成り立つことをいう．L の saddle point 全体の集合を S で表す．次に，

$$K(x,y) = \begin{cases} L(x,y) \ \ (x \in X,\ y \in Y) \\ \infty \ \ (x \in X,\ y \notin Y) \\ -\infty \ \ (x \notin X) \end{cases}$$

とする．Rockafellar [21] は，

$$T(x,y) = \begin{cases} \partial(-K(\cdot,y))(x) \times \partial K(x,\cdot)(y) \ \ ((x,y) \in X \times Y) \\ \emptyset \ \ ((x,y) \notin X \times Y) \end{cases} \tag{4}$$

で定義される $T \subset (E \times F) \times (E^* \times F^*)$ が極大単調作用素であることを証明した．また，$T^{-1}0 = S$ が成り立つ．ここで，任意の $(x,y) \in E \times F$ に対し，

$$\|(x,y)\| = \{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2\}^{\frac{1}{2}}$$

とし，$E \times F$ をこのノルムによる Banach 空間とみなしている．このとき，$(E \times F)^* = E^* \times F^*$ となる．また，$(x,y) \in E \times F$ と $(x^*,y^*) \in E^* \times F^*$ に対し，

$$\Big\langle (x,y),(x^*,y^*) \Big\rangle = \langle x,x^* \rangle + \langle y,y^* \rangle$$

となる．

定理 4.3. $(E,\|\cdot\|_E)$ と $(F,\|\cdot\|_F)$ を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$X \subset E$ と $Y \subset F$ を空でない閉凸集合とする．また，$L : X \times Y \to \mathbf{R}$ を，任意の $x \in X$ に対して，$y \in Y$ の関数 $L(x,y)$ が下半連続な凸関数であり，任意の $y \in Y$ に対して，$x \in X$ の関数 $L(x,y)$ は上半連続な凹関数であるとする．また，L の saddle point 全体の集合 S は空でないとする．$(x_1,y_1) = (x,y) \in E \times F$ とし，$(u_n,v_n) \in X \times Y$ を $(u,v) \in X \times Y$ の関数

$$L(u,v) - \tfrac{1}{2r_n}\|u\|_E^2 + \tfrac{1}{r_n}\langle u, J_E x_n \rangle + \tfrac{1}{2r_n}\|v\|_F^2 - \tfrac{1}{r_n}\langle v, J_F y_n \rangle$$

の一意の saddle point とする．さらに，

$$\begin{cases} x_{n+1} = J_E^{-1}(\alpha_n J_E(x) + (1-\alpha_n)J_E(u_n)); \\ y_{n+1} = J_F^{-1}(\alpha_n J_F(y) + (1-\alpha_n)J_F(v_n)) \ \ (n = 1,2,\dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{(x_n,y_n)\}$ は $P_S(x,y)$ に強収束する．ただし，J_E と J_F はそれぞれ，E と F の双対写像を表すとする．

証明 $(z,w) \in E \times F$ に対し，

$$\|(z,w)\| = \{\|z\|_E^2 + \|w\|_F^2\}^{\frac{1}{2}}$$

とし，$E{\times}F$ をこのノルムによる Banach 空間とみなす．このとき，$E{\times}F$ は滑らかで一様凸な Banach 空間となる．実際，$\{(z_n,w_n)\}$ と $\{(z'_n,w'_n)\}$ を $E{\times}F$ の元からなる点列で，$\|(z_n,w_n)\| = \|(z'_n,w'_n)\| = 1$ であり，$\lim_{n\to\infty}\|(z_n,w_n)+(z'_n,w'_n)\| = 2$ を満たすものとする．このとき，補助定理 2.1 により，狭義単調増加で連続な凸関数 $g_1,g_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ で，$g_1(0) = g_2(0) = 0$ を満たすものが存在して，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\|\frac{z_n+z'_n}{2}\right\|_E^2 &\le \frac{1}{2}\|z_n\|_E^2 + \frac{1}{2}\|z'_n\|_E^2 - \frac{1}{4}g_1(\|z_n - z'_n\|_E) \\ \left\|\frac{w_n+w'_n}{2}\right\|_F^2 &\le \frac{1}{2}\|w_n\|_F^2 + \frac{1}{2}\|w'_n\|_F^2 - \frac{1}{4}g_2(\|w_n - w'_n\|_F) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &\le g_1(\|z_n - z'_n\|_E) + g_2(\|w_n - w'_n\|_F) \\ &\le 2\|(z_n,w_n)\|^2 + 2\|(z'_n,w'_n)\|^2 - \|(z_n+z'_n, w_n+w'_n)\|^2 \\ &= 4 - \|(z_n,w_n)+(z'_n,w'_n)\|^2 \end{aligned}$$

となる．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} g_1(\|z_n - z'_n\|_E) = 0$ と $\lim_{n\to\infty} g_2(\|w_n - w'_n\|_F) = 0$ を得る．これより，$\lim_{n\to\infty}\|z_n - z'_n\|_E = 0$ と $\lim_{n\to\infty}\|w_n - w'_n\|_F = 0$ を得るので，

$$\lim_{n\to\infty}\|(z_n,w_n)-(z'_n,w'_n)\|=0$$

である．よって，$E\times F$ は一様凸である．また，E と F は滑らかで，回帰的な Banach 空間であるので，E^* と F^* は狭義凸な Banach 空間である．また，Banach 空間 Z が狭義凸であるための必要十分条件は，任意の $x,y\in Z$ で $x\neq y$ であるものに対して，

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2<\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2$$

が成り立つことであるので，$E^*\times F^*$ は狭義凸である．そこで，$(E\times F)^*=E^*\times F^*$ であるから，$E\times F$ は滑らかである．また，J を $E\times F$ から $E^*\times F^*$ への双対写像とするとき，任意の $(z,w)\in E\times F$ に対して，$(J_Ez,J_Fw)\subset J(z,w)$ となることは明らかである．$E\times F$ は滑らかであるから，J は一価写像なので，任意の $(z,w)\in E\times F$ に対して，

$$(J_Ez,J_Fw)=J(z,w)$$

が成り立つ．

そこで，T を (4) により定義される $E\times F$ から $E^*\times F^*$ への極大単調作用素とし，$r>0$ とする．また，J_r を T の resolvent とする．このとき，$(z,w)\in E\times F$ とし，$J_r(z,w)=(z_r,w_r)$ とおくと，

$$(J_Ez,J_Fw)\in(J_Ez_r,J_Fw_r)+rT(z_r,w_r)$$

となる．これより，

$$\begin{cases} z_r=\operatorname{argmin}_{u\in X}\{-L(u,w_r)+\frac{1}{2r}\|u\|_E^2-\frac{1}{r}\langle u,J_Ez\rangle\}; \\ w_r=\operatorname{argmin}_{v\in Y}\{L(z_r,v)+\frac{1}{2r}\|v\|_F^2-\frac{1}{r}\langle v,J_Fw\rangle\}, \end{cases}$$

となる．よって，任意の $(u,v)\in X\times Y$ に対して，

$$L_{r,z,w}(u,w_r)\leq L_{r,z,w}(z_r,w_r)\leq L_{r,z,w}(z_r,v)$$

となる．ここで，任意の $(u,v)\in X\times Y$ に対して，

$$L_{r,z,w}(u,v)=L(u,v)-\frac{1}{2r}\|u\|_E^2+\frac{1}{r}\langle u,J_Ez\rangle+\frac{1}{2r}\|v\|_F^2-\frac{1}{r}\langle v,J_Fw\rangle$$

とする．これより，(z_r,w_r) が $L_{r,z,w}$ の saddle point となるので，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，

$$(u_n,v_n)=J_{r_n}(x_n,y_n)$$

が成り立つ．

また，任意の $(x^*,y^*)\in E^*\times F^*$ に対して，$J^{-1}(x^*,y^*)=(J_E^{-1}x^*,J_F^{-1}y^*)$ となることは明らかなので，$n\in\mathbf{N}$ に対して，

$$(x_{n+1},y_{n+1})=J^{-1}(\alpha_nJ(x,y)+(1-\alpha_n)J(u_n,v_n))$$

となる．ここで，定理 3.1 を用いると，点列 $\{(x_n,y_n)\}$ は $P_S(x,y)$ に強収束する．■

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: Properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York 1996, pp. 15-20.

[2] H. Brézis and P. L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329-345.

[3] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323-339.

[4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers (1990).

[5] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403-419.

[6] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226-240.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107-115.

[9] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361-374.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., to appear.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, to appear.

[12] P. L. Lions, *Une méthode itérative de résolution d'une inéquation variationnelle*, Israel J. Math. **31** (1978), 204-208.

[13] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154-159.

[14] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Archiv der Mathematik, to appear.

[15] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383-390.

[16] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York 1996, pp. 313-318.

[17] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497-510.

[18] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton N. J. (1969).

[19] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209-216.

[20] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75-88.

[21] R. T. Rockafellar, *Monotone operators associated with saddle functions and minimax problems*, Nonlinear Functional Analysis, Part I (F. E. Browder Ed.), Symposia in Pure Math. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, pp. 241-250.

[22] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877-898.

[23] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641-3645.

[24] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189-202.

[25] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, in Fixed Point Theory and Applications (M. A. Théra and J. B. Baillon Eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series 252, 1991, pp. 397-406.

[26] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87-108.

[27] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers (2000) (Japanese).

[28] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers (2000).

[29] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127-1138.